1　湿球温度とは

湿球温度とは，湿り空気を一定圧力下で断熱的に冷却していき関係湿度 φ が 100% に達したときの空気の温度です[1]。空気を冷却して飽和させるというのは露点と似たような発想ですが，露点の定義では失った熱 (エネルギー) を外部に放出するのに対し，湿球温度の定義ではエネルギーは水の蒸発に利用されます。

2　湿球温度の計算

2.1　湿度 H の変化

エネルギー保存則より，湿り空気の断熱冷却では空気の温度低下に伴って放出されるエネルギーと水の気化に伴う蒸発潜熱が一致します。これを数式で表現すると

$$\Delta H_{vap}\,\mathrm{d}H = -(C_g\,\mathrm{d}T + HC_v\,\mathrm{d}T)$$

$$\begin{pmatrix} H & :\text{湿度} \\ \mathrm{d}H & :\text{湿度変化} \\ \mathrm{d}T & :\text{温度変化} \\ \Delta H_{vap} & :\text{水の蒸発潜熱} \\ C_g & :\text{乾き空気の定圧比熱} \\ C_v & :\text{水蒸気の定圧比熱} \end{pmatrix}$$

となります[2]。この式を整理すると

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} = -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}H - \frac{C_g}{\Delta H_{vap}}$$

という非斉次 1 階線形常微分方程式を得ます。このままでは解析解を求められないため，$-C_g/\Delta H_{vap}$ の項を 0 とし，斉次微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} = -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}H$$

とします。この微分方程式は変数分離で解けるので，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} &= -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}H \\ \frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} &= -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} \end{aligned}$$

両辺を T で積分して

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}\,\mathrm{d}T &= \int -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}\,\mathrm{d}T \\ \int \frac{\mathrm{d}H}{H} &= -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}\int \mathrm{d}T \\ \ln H &= -\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}T + C \\ H &= \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}T + C\right) \\ &= e^C \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}}T\right) \end{aligned}$$

[1] 湿球温度はいくつかの定義があり，ここで書いたのは熱力学的湿球温度と呼ばれる定義です。

[2] 簡単にするため，定圧比熱は温度に依存しない定数としています。実際には Cg, Cv は温度 T の関数になります。

e^C を改めて C を置き直して

$$
= C \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right)
$$

となります。

ここで，定数変化法より，積分定数 C を T の関数 u とおくと，H は

$$
H = u \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right)
$$

となります。両辺を T で微分すると

$$
\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) - \frac{C_v}{\Delta H_{vap}} u \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right)
$$

となるので，これを元の微分方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) - \cancel{\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} u \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right)} &= -\cancel{\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} u \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right)} - \frac{C_g}{\Delta H_{vap}} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) &= -\frac{C_g}{\Delta H_{vap}} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} &= -\frac{C_g}{\Delta H_{vap}} \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right)
\end{aligned}
$$

両辺を T で積分して

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}T} \, \mathrm{d}T &= \int -\frac{C_g}{\Delta H_{vap}} \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) \mathrm{d}T \\
\int \mathrm{d}u &= -\frac{C_g}{\Delta H_{vap}} \int \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) \mathrm{d}T \\
u &= -\frac{\frac{C_g}{\cancel{\Delta H_{vap}}}}{\frac{C_v}{\cancel{\Delta H_{vap}}}} \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) + C \\
&= -\frac{C_g}{C_v} \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) + C
\end{aligned}
$$

となります。これを H の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
H &= \left(-\frac{C_g}{C_v} \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) + C\right) \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) \\
&= -\frac{C_g}{C_v} \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T - \frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) + C \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) \\
&= C \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) - \frac{C_g}{C_v}
\end{aligned}
$$

となります。

初期条件として，湿り空気の温度を T_0 としてそのときの湿度を H_0 とすると

$$
\begin{aligned}
H_0 &= C \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T_0\right) - \frac{C_g}{C_v} \\
H_0 + \frac{C_g}{C_v} &= C \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T_0\right) \\
C &= \left(H_0 + \frac{C_g}{C_v}\right) \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T_0\right)
\end{aligned}
$$

となるので，これを H の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
H &= \left(H_0 + \frac{C_g}{C_v}\right) \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T_0\right) \exp\left(-\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) - \frac{C_g}{C_v} \\
&= \left(H_0 + \frac{C_g}{C_v}\right) \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T_0 - \frac{C_v}{\Delta H_{vap}} T\right) - \frac{C_g}{C_v} \\
&= \left(H_0 + \frac{C_g}{C_v}\right) \exp\left(\frac{C_v}{\Delta H_{vap}} (T_0 - T)\right) - \frac{C_g}{C_v}
\end{aligned}
$$

を得ます。ここで，温度の単位は本来ならば絶対温度を使用するべきですが，式中では温度差 $T_0 - T$ を利用しているため，セルシウス温度を使用できます [3]。

2.2 湿球温度の計算

2.1 で求めた式が表しているのは，温度 T_0，湿度 H_0 の湿り空気を断熱的に温度 T まで冷却したときの湿度 H です。湿球温度では空気の関係湿度が $\varphi = 100\%$ であるので，湿球温度を求めるには湿度 H を関係湿度 φ に変換する必要があります。水蒸気分圧を p，飽和水蒸気圧を p_s，全圧 (大気圧) を P，水の分子量を M_{water}，乾き空気の平均分子量を M_{air} とすると，

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{M_{water}}{M_{air}} \frac{p}{P - p} \\
\varphi &= \frac{p}{p_s}
\end{aligned}
$$

であるので，φ を H の式で表すと

$$
\varphi = \frac{\frac{HP}{M_{water}/M_{air} + H}}{p_s}
$$

となります。ここで，p_s [kPa] は Antoine 式という近似式で近似でき，温度 T [℃] 水の場合は

$$
\log p_s = 7.06252 - \frac{1650.270}{T + 226.346}
$$

となります。

以上の式により，温度 H_0，湿度 H_0 の湿り空気を温度 T まで断熱冷却したときの空気の関係湿度 φ_T を計算できます。湿球温度 T_w は，

$$
\varphi_T \equiv \frac{\frac{HP}{M_{water}/M_{air} + H}}{p_{s,T}} = 1
$$

となる点であるので，この方程式を解けば湿球温度を求めることができます。この方程式を解析的に解くのは困難なため，実際の計算では数値計算で解くことになります。

[3] 絶対温度とセルシウス温度の目盛り幅が同じであるため。