関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の引数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ にそれぞれ誤差 (不確かさ)$e_1, e_2, \cdots, e_n$ があるとします。このときの関数値の誤差を計算します。

求める誤差は,

$$f(\alpha_1 + e_1, \alpha_2 + e_2, \cdots, \alpha_n + e_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

によって計算できます。しかし，これを計算するには真の値が必要になります。真の値が分かっているならそれを使って計算すればいいので，この式は役に立ちません。そこで，$f(\alpha_1 + e_1, \alpha_2 + e_2, \cdots, \alpha_n + e_n)$ を Taylor 展開してみます。

Taylor 展開

多変数関数の Taylor 展開は，以下のような式になります。

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1 + e_1, \alpha_2 + e_2, \cdots, \alpha_n + e_n) = \\ &\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_n=0}^{\infty} \frac{(x_1 - \alpha_1)^{i_1} (x_2 - \alpha_2)^{i_2} \cdots (x_n - \alpha_n)^{i_n}}{i_1! i_2! \cdots i_n!} \left(\frac{\partial^{i_1 + i_2 + \cdots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}} \right) (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \end{aligned}$$

ここで，二次以上の項を「高次の微小項」として無視すると，

$$f(\alpha_1 + e_1, \alpha_2 + e_2, \cdots, \alpha_n + e_n) \approx f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

となります。つまり，

$$e_f = f(\alpha_1 + e_1, \alpha_2 + e_2, \cdots, \alpha_n + e_n) - f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

ということです。

誤差の評価は，最悪の場合を考慮して行うべきです。ここで，それぞれの誤差 e_i は正の値のみにすると決めても，偏微分の部分で負の値が出てくる可能性があります。負の値が出てくると，正負で打ち消しあって誤差が小さくなってしまう恐れがあります。そこで，誤差の 2 乗を考えてすべてを正にしてしまいます。すなわち,

$$\begin{aligned} e_f^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 e_i^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} e_i e_j \end{aligned}$$

ということです。このとき，それぞれの e_i は独立であると考え，$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} e_i e_j$ の部分をすべて 0 にしてしまいます。すると,

$$e_f^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 e_i^2$$

を得ます。これは常に非負の値になるので，非負の平方根をとることで誤差伝播の公式

$$e_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 e_i^2}$$

が得られます。