問題

$\mathbf{R}^4$ の部分空間

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle|\ x_1-x_2+x_3-x_4 \text{かつ}\ x_1+x_2+x_4=0\right\}$$

の直交補空間 $W^{\perp}$ 基底と次元を求めよ。

$x_3=2t, x_4=2s$ とすると,

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2t & -2s & = & 0\\ x_1 & +x_2 & & +2s & = & 0\end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} x_1= & -t\\ x_2= & t-2s\\ x_3= & 2t\\ x_4= & 2s\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}s$$

を得る。

$W^{\perp}$ の基底を $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ とすると，$W^{\perp}$ の任意のベクトルは W の基底と直交する [1]。したがって,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix} \text{かつ} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

である。内積を計算すると

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & & = & 0\\ & -2x_2 & & -2x_4 & = & 0\end{cases}$$

となる。$x_3=t, x_4=s$ とすると,

$$\begin{cases} x_1= & 2t+s\\ x_2= & s\\ x_3= & t\\ x_4= & s\end{cases}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}s$$

[1] 内積が 0 になる

を得る。

　よって，求める基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

であり，次元は 2 である。