問題

一辺の長さ $2a$ の正六角形型 1 回巻きコイルがあり，右回りに電流 I が流れている。正六角形の中心における磁束密度の大きさ $|\boldsymbol{B}|$ を Biot–Savart の法則により算出せよ。

解答例

正六角形を 6 等分して考え，Fig. 1 のように座標を定める。z 軸は，紙面に垂直な方向とする。$\boldsymbol{r} = (0, 0, 0)$，

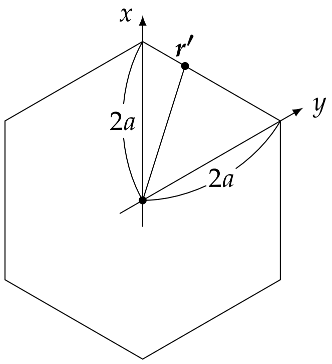


Fig. 1: 座標の設定

$\boldsymbol{r}' = (x, y, z)$ とする。$\boldsymbol{r}'$ は直線 $y = 2a - x$ 上を移動するので，$\boldsymbol{r}' = (x, 2a - x, 0)$ と書ける。
また，$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = (-x, x - 2a, 0)$ である。

$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$

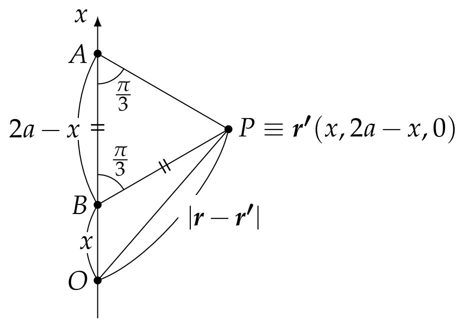


Fig. 2: $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ の求め方

ここで，$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ を考える。Fig. 2 のように，$\angle \mathrm{ABP} = \dfrac{\pi}{3}$ となる点 B を AO 上にとる。このとき，$\overline{\mathrm{OB}}$ は P の x 座標に一致する。$\overline{\mathrm{OA}} = 2a$ であるから $\overline{\mathrm{AB}} = 2a - x$ である。$\angle \mathrm{ABP} = \angle \mathrm{BAP} = \dfrac{\pi}{3}$ であるので，$\triangle \mathrm{ABP}$ は正三角形である。したがって，$\overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{AB}} = 2a - x$ である。$\angle \mathrm{OBP} = \pi - \angle \mathrm{ABP} = \dfrac{2}{3}\pi$ より，余

弦定理から

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2 &= x^2+(2a-x)^2-2x(2a-x)\cos\frac{2}{3}\pi \\
&= x^2-2ax+4a^2 \\
\therefore |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| &= \sqrt{x^2-2ax+4a^2}
\end{aligned}
$$

を得る。

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$

x を微小量変化させたときの $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ は

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = (1,-1,0)\mathrm{d}x
$$

である。

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

次に，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ を考える。$\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ と $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ をそれぞれ正規直交基底に移すと

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_C &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_C \mathrm{d}x \\
(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')_C &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ x-2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2}-a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}\,a \\ 0 \end{pmatrix}_C
\end{aligned}
$$

となる。[1]

よって，正規直交系における求める外積は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r}'_C \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')_C &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_C \times \begin{pmatrix} -\frac{x}{2}-a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x-\sqrt{3}\,a \\ 0 \end{pmatrix}_C \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}\,a \end{pmatrix}_C \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

となる。これを元の斜交座標に戻すと，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}\,a \end{pmatrix}_C \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}\,a \end{pmatrix}_C \mathrm{d}x \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{3}\,a \end{pmatrix} \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

[1]添え字の C は*Cartesian coordinates* (デカルト座標) のつもり。

となる。また，明らかに $|\mathrm{d}\boldsymbol{r'} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})| = \sqrt{3}\,a\mathrm{d}x$ である。

Biot–Savart

以上の結果を用いて実際に $|\boldsymbol{B}|$ を計算する。Biot–Savart の法則より

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}| &= \left| \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{2a}^{0} \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{r'} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|^3} \right| \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2a} \frac{I\sqrt{3}\,a\mathrm{d}x}{(x^2 - 2ax + 4a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 2ax + 4a^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

である。ここで，不定積分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 2ax + 4a^2)^{3/2}}$ を考える。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 2ax + 4a^2)^{3/2}}$$

$u = x - a$ とすると $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ であり，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 - 2ax + 4a^2)^{3/2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(3a^2 + (x-a)^2)^{3/2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{(3a^2 + u^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

となる。さらに，$u = \sqrt{3}\,a\tan(s)$ とすると，$\mathrm{d}u = \sqrt{3}\,a\sec^2(s)\,\mathrm{d}s$ であり，

$$
\begin{aligned}
(3a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} &= (3a^2 + 3a^2\tan^2(s))^{\frac{3}{2}} \\
&= \left\{3a^2(\tan^2(s) + 1)\right\}^{\frac{3}{2}} \\
&= 3\sqrt{3}\,a^3\sec^3(s)
\end{aligned}
$$

となる。したがって，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{(3a^2 + u^2)^{3/2}} &= \int \frac{\sqrt{3}\,a\sec^2(s)}{3\sqrt{3}\,a^3\sec^3(s)}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{3a^2}\int \cos(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sin(s)}{3a^2} + C \qquad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}
$$

を得る。これに $s = \tan^{-1}\left(\dfrac{u}{\sqrt{3}\,a}\right)$ を代入すると

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(3a^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{3}\,a}\right)\right)}{3a^2} + C$$

となり，$\sin\left(\tan^{-1}(z)\right) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ を利用すると [2]

$$= \frac{u}{3a^2\sqrt{3a^2+u^2}} + C$$

となる。$u = x - a$ を代入すると

$$= \frac{x-a}{3a^2\sqrt{x^2-2ax+4a^2}} + C$$

を得る。

以上の結果より，$|\boldsymbol{B}|$ を計算すると

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}| &= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{4\pi}\int_0^{2a}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2ax+4a^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{4\pi}\left[\frac{x-a}{3a^2\sqrt{x^2-2ax+4a^2}}\right]_0^{2a} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{4\pi}\left(\frac{a}{3a^2\cdot 2a} - \frac{-a}{3a^2\cdot 2a}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I a}{4\pi}\cdot\frac{1}{3a^2} \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I}{12\pi a}
\end{aligned}$$

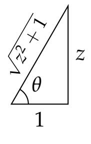
となる。

この結果は，正六角形を 6 等分したうちの 1 つを基に計算したものであるので，正六角形全体ではこれを 6 倍する必要がある。すなわち，求める $|\boldsymbol{B}|$ は

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{B}| &= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I}{12\pi a}\times 6 \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\mu_0 I}{2\pi a}
\end{aligned}$$

である。

答　$|\boldsymbol{B}| = \dfrac{\sqrt{3}\,\mu_0 I}{2\pi a}$

[2] 

左図のような三角形があるとき，三角比の定義から $\tan(\theta) = z \ \therefore \tan^{-1}(z) = \theta$ である。$\sin(\theta) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ であることから，$\sin\left(\tan^{-1}(z)\right) = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+1}}$ を得る。