1 電磁誘導

ファラデーの法則

任意の閉曲線 S 内の領域を通る磁界の変化と，S に沿って発生する電場は比例関係にある。

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ファラデーの法則を N 回巻きコイルに適用すると，誘導起電力 ε は

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

となる[1]。

1.1 相互インダクタンス

N_1 回巻きのコイル 1 と N_2 回巻きのコイル 2 が存在し，コイル 1 に時間と共に変動する電流 I_1 が流れるとする。I_1 は磁場を発生させ，I_1 による磁束によりコイルには誘導起電力 ε_{21} が生じる。これは，ファラデーの法則より

$$\varepsilon_{21} = -N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S_2} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S_2}$$

と表される。コイル 2 を貫く電束 Φ_{21} の時間変化は I_1 の時間変化に比例するので，比例定数を M_{21} として

$$N_2\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

である。このときの比例定数

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}$$

が相互インダクタンスである。

同様にして M_{12} を考えることができるが，相反定理より $M_{21} = M_{12}$ である。

例

中心が同じ位置にある半径 $R_1, R_2 (R_1 \gg R_2)$ の 1 回巻きコイルが同一平面内にある場合を考える。

外側のコイルに電流 I が流れるとすると，コイルに垂直な向きの中心位置での磁束密度は

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R_1}$$

である[2]。$R_1 \gg R_2$ であることから，内側のコイルを貫く磁場を，外側のコイルが中心位置につくる磁場で近似すると，内側のコイルを貫く磁束は

$$\Phi_{21} = B \cdot \pi R_2^2 = \left(\frac{\mu_0 I}{2R_1}\right)\pi R_2^2 = \frac{\mu_0 \pi I R_2^2}{2R_1}$$

となる。よって，相互インダクタンスは

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{\mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

である。

[1]静電ポテンシャルの定義から，電場をある経路に沿って積分した値を電位差という。教科書 pp. 59f 参照。

[2]Biot-Savart の法則から $H = \dfrac{I}{2R_1}$ を計算できる。

1.2 自己インダクタンス

N 回巻きコイルに電流 I が流れる場合を考える。I が一定であれば，コイルを貫く磁束は一定である。しかし，I が時間と共に変動する場合，ファラデーの法則によれば変化を打ち消すように誘導起電力が発生する。この現象を自己誘導という。

誘導起電力の大きさは，相互誘導の場合と同様にして

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

であり，比例定数 L により

$$\varepsilon = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

と書ける。このときの

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

が自己インダクタンスである。

例

長さ l，半径 R の N 回巻きソレノイドに電流 I が流れている場合を考える。

ソレノイド内の軸方向の磁束密度は

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} = \mu_0 nI$$

で与えられる ($n = {}^{N}\!/_{l}$ は単位長さ当たりの巻き数)[3]。したがって，導線 1 巻き当たりを貫く電束は

$$\Phi = B\cdot\pi R^2 = \mu_0 nI\pi R^2$$

である。よって，自己インダクタンスは

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_0 n^2\pi R^2 l$$

となる。

2 電場・磁場のエネルギー

2.1 電場のエネルギー

容量 C の導体対が $\pm q$ の電荷を帯電し，電位差が $V = {}^{q}\!/_{C}$ となっているときのエネルギーを考える。

電位差が $V' = {}^{q'}\!/_{C}$ となっているとき，$-q'$ の側から $+q'$ の側へ電荷 $\mathrm{d}q'$ を移動するのに必要な仕事は

$$\mathrm{d}W = V'\mathrm{d}q' = \frac{q'}{C}\mathrm{d}q'$$

である。よって，電荷 $\pm q$ を帯電させるまでに必要な仕事は

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^q \frac{q'}{C}\mathrm{d}q' = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

であり，これが電荷配置の持つエネルギーに相当する。

[3]導出は面倒なのでここでは省略。教科書 pp. 167ff 参照。

例

極板面積 A，間隔 d の平行平板コンデンサに蓄えられるエネルギーを考える。このコンデンサの容量は

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

であるので，両極板に電荷 $\pm q$ が帯電しているときの極板間の電位差は

$$v - \frac{d}{\varepsilon_0 A} q$$

である。極板が帯電していない状態からこの状態にするまでに要する仕事は

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 A}{d} \left(\frac{d}{\varepsilon_0 A} q \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V^2$$

であるので，これに等しいエネルギー

$$U_C = W = \frac{\varepsilon_0 A}{2d} V^2$$

が極板間に蓄えられることになる。

このエネルギー U_C は，体積 Ad の領域内に蓄えられているので，エネルギー密度は

$$u_e = \frac{U_C}{Ad} = \frac{\varepsilon_0}{2d^2} V^2$$

である。ここで，極板間の電場が一定かつ垂直であるとすると，電場 E と電束密度 D は，

$$\begin{cases} E = \frac{V}{d} \\ D = \frac{\varepsilon_0 V}{d} \end{cases}$$

と表される。したがって，エネルギー密度は

$$u_e = \frac{1}{2} \frac{V}{d} \frac{\varepsilon_0 V}{d} = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

と書くことができる。

一般に，電場の強さが $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，電束密度が $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ である点 $\boldsymbol{r}$ における電場のエネルギー密度は

$$u_e(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E(\boldsymbol{r})^2$$

と表される。

2.2 磁場のエネルギー

回路に電源と自己インダクタンス L のコイルが接続されている場合を考える。電源の起電力が ε_{ext} であり，誘導起電力 ε_L を生じてコイルに電流 I が流れるとき電源の仕事率は

$$P_L = \frac{\mathrm{d}W_{ext}}{\mathrm{d}t} = I \varepsilon_{ext}$$

である。電源の起電力と誘導起電力が釣り合っているとすると，$\varepsilon_{ext} = \varepsilon_L$ であるので

$$P = \frac{\mathrm{d}W_{ext}}{\mathrm{d}t} = -I \varepsilon_L = +IL \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

となる。

よって，電流を 0 から I に変化させるまでに電源のする仕事は

$$W_{ext} = \int \mathrm{d}W_{ext} = \int_0^I LI \, \mathrm{d}I = \frac{1}{2} LI^2$$

であり，これがコイルに蓄えられるエネルギーである。

例

十分に長い，長さ l，半径 R の N 回巻きソレノイドに蓄えられるエネルギーを考える。このソレノイドの自己インダクタンスは

$$L = \mu_0 n^2 \pi R^2 l$$

であるので，ソレノイドに蓄えられるエネルギーは

$$U_L = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \pi R^2 l$$

である。この式は，$B = \mu_0 nI$ を用いて

$$U_L = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 nI)^2(\pi R^2 l) = \frac{B^2}{2\mu_0}(\pi R^2 l)$$

と表すことができる。このエネルギー U_L は，体積 $\pi R^2 l$ の領域内に蓄えられているので，エネルギー密度は

$$u_m = \frac{U_L}{\pi R^2 l} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

である。

一般に，磁場の強さが $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ 磁束密度が $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ である点 $\boldsymbol{r}$ における磁場のエネルギー密度は

$$u_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\mu_0}B(\boldsymbol{r})^2$$

と表される。

おまけ

電場のエネルギーと磁場のエネルギーは非常に似た式で表される。また，エネルギー密度も両者の間によ

Table 1: 電場のエネルギーと磁場のエネルギーの比較

電場 $\frac{1}{2}CV^2$		磁場 $\frac{1}{2}LI^2$
係数 $1/2$	$\longleftrightarrow$	係数 $1/2$
容量 C	$\longleftrightarrow$	自己インダクタンス L
電位差 V	$\longleftrightarrow$	電流 I

く似た構造見出すことができる。

3　その他知っていた方がよさそうな人たち

3.1　アンペールの法則

閉曲線 l を外周とする任意の面 S について，点 $\boldsymbol{r}$ のおける電流密度を $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ とすると，点 $\boldsymbol{r}$ のおける磁場の強さ $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ と磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ について

$$\begin{cases} \oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ \oint_l \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \end{cases}$$

が成り立つ。

アンペールの法則から，直線電流から距離 r の位置の磁場の強さと磁束密度は

$$\left\{ \begin{array}{l} H(r) = \frac{I}{2\pi r} \\ B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{array} \right.$$

であることがわかる。

3.1.1 アンペール-マクスウェルの法則

時間的に変化する場が存在する場合，アンペールの法則に変位電流密度の項が加わり

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_S \left(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})}{\partial t}}_{\text{変位電流密度}} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

となる。