以下，球状コンデンサの中心を原点とする三次元極座標 (r, θ, ϕ) を考える。

1 $U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_V E^2 \mathrm{d}V$ の計算

点 $\boldsymbol{r} = (r, \theta, \phi)$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求める。ただし，$a \leq r \leq b$ とする。半径 r の球面 S を考えると，S 内の電荷の総和は Q であるので，ガウスの法則より

$$Q = \oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

である。ただし，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ における電束密度であり，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は S に垂直な面素ベクトルである。ここで，S の球対称性から，$\boldsymbol{D}$ は角度成分を持たず，r のみで決まる。よって，$\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトル $\boldsymbol{e_r}$ を用いて $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r)\boldsymbol{e_r}$ と書ける。また，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ は S に垂直であることから $\boldsymbol{r}$ に平行であるので，$\mathrm{d}S \equiv |\mathrm{d}\boldsymbol{S}|$ を用いて $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e_r}\mathrm{d}S$ と書ける。

1.1 ヤコビアン

三次元極座標は

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

で表されるので，ヤコビアン J は

$$\begin{aligned}
J &= \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} \right| \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & r \end{vmatrix} \\
&= -r\sin\theta\sin\phi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad - r\sin\theta\cos\phi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad + r \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi \end{vmatrix} \\
&= -r^2\sin\theta\sin^2\phi \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad - r^2\sin\theta\cos^2\phi \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad + r^2\sin\theta\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\phi & \cos\phi \\ \sin\phi & \sin\phi \end{vmatrix} \\
&= (r^2\sin\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\phi + 0) \\
&= r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

より $J = r^2\sin\theta$ である。

以上より

$$
\begin{aligned}
Q &= \oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \oint_S D(r)\boldsymbol{e_r} \cdot \boldsymbol{e_r}\, \mathrm{d}S \\
&= \oint_S D(r)\, \mathrm{d}S \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r)\,|J|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(r)\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= r^2 D(r)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
&= r^2 D(r)\int_0^{2\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= r^2 D(r)\int_0^{2\pi} 2\mathrm{d}\phi \\
&= 4\pi r^2 D(r) \\
\therefore D(r) &= \frac{Q}{4\pi r^2}
\end{aligned}
$$

である。誘電率 ε_0 の定義より，

$$
\begin{aligned}
E(\boldsymbol{r}) &= \frac{D(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}
$$

を得る。

したがって，

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \iiint_V E^2 \mathrm{d}V \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 |J|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b r^2\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b r^2\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b r^2\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0 r^2)^2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b 4\pi r^2\frac{Q^2}{(4\pi r^2)^2\,\varepsilon_0^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^b 4\pi r^2\frac{Q^2}{(4\pi r^2)^2\,\varepsilon_0^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\int_a^b\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a \\
&= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)
\end{aligned}
$$

より，$U = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ である。

2 $U = \frac{Q^2}{2C}$ の確認

球面間の電位差 V は

$$
\begin{aligned}
V &= -\int_b^a E(r)\,\mathrm{d}r \\
&= -\int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a\frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)
\end{aligned}
$$

より，$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ である。

$Q = CV$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{V}{Q} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\end{aligned}$$

を得る。

したがって，

$$\begin{aligned}U &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{Q^2}{2} \cdot \frac{1}{C} \\ &= \frac{Q^2}{2C}\end{aligned}$$

となり，$U = \dfrac{Q^2}{2C}$ を確認できた。