

Disclaimer

双極子モーメントによる電場と静電ポテンシャルの式を導出する問題の回答例です。式計算は極力省略しないよう努めました。級数が収束することの証明などは省略しています。

0 環境の定義

Fig. 1 のように、同じ大きさの電荷 $+q$ と $-q$ が存在している場合を考える ($q > 0$)。負電荷から見た正電荷の相対位置を \mathbf{d} とし、電荷間の中点を原点としたときの \mathbf{r} における双極子モーメントによる電場を考える。このとき、正電荷の位置は $\mathbf{d}/2$ 、負電荷の位置は $-\mathbf{d}/2$ と表される。

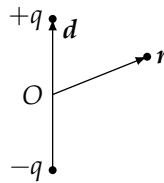


Fig. 1: 全体の様子

1 1つの電荷による電場

ここで、正電荷による電場を考える。正電荷から見た \mathbf{r} の位置は $\mathbf{r} - \mathbf{d}/2$ である。正電荷を中心とする閉曲面 S を貫く電束について、位置 \mathbf{r}' における電束密度を $\mathbf{D}(\mathbf{r}')$ とすると、ガウスの法則より

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S} = q \quad (1)$$

である。ここで、 $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r} - \mathbf{d}/2$ であり、 $d\mathbf{S}$ は S に垂直な面素ベクトルである。

点電荷周りの電場は球対称であるので、 $\mathbf{D}(\mathbf{r}')$ は角度成分を持たず、動径成分のみを持つ。したがって、これを

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}') = D(r') \mathbf{e}_{r'} \quad (2)$$

と書く。ただし、 $|\mathbf{r}'| = r'$ とし、 $\mathbf{e}_{r'}$ は \mathbf{r}' 方向の単位ベクトルである。また、 $d\mathbf{S}$ は S に直交するベクトルであるが、 S は球であるので、 $\mathbf{e}_{r'}$ と平行である。よって、これを $d\mathbf{S}$ の大きさ dS を用いて

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_{r'} dS \quad (3)$$

と書ける。

(2) と (3) を (1) に代入して

$$\oint_S D(r') \mathbf{e}_{r'} \cdot \mathbf{e}_{r'} dS = q \quad (4)$$

を得る。 $\mathbf{e}_{r'} \cdot \mathbf{e}_{r'} = 1$ より、(4) は

$$\oint_S D(r') dS = q \quad (5)$$

と書ける。 $D(r')$ は、電場の対称性から、 r' が一定であるという条件の下で一定である。よって、(5)の左辺は

$$\begin{aligned}\oint_S D(r') dS &= D(r') \oint_S dS \\ &= 4\pi r'^2 D(r')\end{aligned}\tag{6}$$

となる。(6)を(5)に代入すると

$$\begin{aligned}4\pi r'^2 D(r') &= q \\ \therefore D(r') &= \frac{q}{4\pi r'^2}\end{aligned}\tag{7}$$

を得る。(7)を(2)に代入して、電束密度は

$$D(r') = \frac{q}{4\pi r'^2} e_{r'}\tag{8}$$

となる。

誘電率の定義より、正電荷による電場 $E(r')$ と電束密度の関係は

$$D(r') = \epsilon_0 E(r')\tag{9}$$

である。(8)と(9)より、

$$E(r') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} e_{r'}\tag{10}$$

を得る。 $|r'| = r'$ より、 $e_{r'} = \frac{r'}{r'}$ であるので、正電荷による電場は

$$\begin{aligned}E(r') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \cdot \frac{r'}{r'} \\ &= \frac{qr'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\end{aligned}\tag{11}$$

と書ける。

負電荷の場合も同様にして、 $r'' \equiv r + d/2$ とすると

$$E(r'') = \frac{-qr''}{4\pi\epsilon_0 r''^3}\tag{12}$$

となる。

2 全体の電場

重ね合わせの原理より、電場は正電荷によるものと負電荷によるものの和として表される。すなわち、全体の電場 $E(r)$ は(11)と(12)の結果より、

$$\begin{aligned}E(r) &= E(r') + E(r'') \\ &= \frac{qr'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} + \frac{-qr''}{4\pi\epsilon_0 r''^3}\end{aligned}\tag{13}$$

となる。(13)に

$$\begin{cases} r' = r - d/2 \\ r'' = r + d/2 \end{cases}\tag{14}$$

を代入すると

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|^3} + \frac{-q(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|^3} \quad (15)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} \pm \mathbf{d}/2| &= \sqrt{(\mathbf{r} \pm \mathbf{d}/2) \cdot (\mathbf{r} \pm \mathbf{d}/2)} \\ &= \sqrt{r^2 \pm (\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) + d^2/4} \\ &= r \sqrt{1 \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}} \\ &= r \left(1 \pm \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

であるので、これを (15) に代入すると

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (17)$$

を得る。

3 近似式

電気双極子から十分離れた点における電場の近似式を考える。双極子による電場は (17) より

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) &= \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

である。

3.1 近似公式

ここで、一般の $(1+x)^n$ の近似公式を考える。 $(1+x)^n$ を Maclaurin 展開すると

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}x^4 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (n-j)}{i!} x^i \end{aligned} \quad (19)$$

となる。 x^k 以上の高次の項が無視し得るとき, (19) は

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (n-j)}{i!} x^i + O(x^k) \\ \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (n-j)}{i!} x^i \quad (20)$$

を書ける。

3.2 近似公式の適用

(19) を (18) に適用する。電気双極子から十分離れた点においては $|r| \gg |d|$ であるので, $(d/r)^2$ は十分に小さく, 無視し得る。すなわち, (20) において $x = \mp \mathbf{r} \cdot \mathbf{d} / r^2 + d^2 / 4r^2$, $n = -3/2$, $k = 2$ とした場合の式を (18) に適用する。これは,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right) \right\} - \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right) \right\} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{4r^2} \right) - \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{d^2}{4r^2} \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(1 + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2 \right) - \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(1 - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2 \right) \right] \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(1 + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \right) - \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} \right) \left(1 - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\left(\mathbf{r} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{d}}{2} - \frac{\mathbf{d}}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \right) - \left(\mathbf{r} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \mathbf{r} + \frac{\mathbf{d}}{2} - \frac{\mathbf{d}}{2} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \right) \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{2r^2} \mathbf{r} \times 2 - \frac{\mathbf{d}}{2} \times 2 \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{d} \right) \quad (21) \end{aligned}$$

となる。電気双極子モーメントは定量的に

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (22)$$

と定義される。(22) を (21) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^2} \mathbf{r} - \mathbf{d} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{q\mathbf{d}}{r^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

を得る。

(23) に $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ を適用すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/r)}{r^3} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r)}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{r^3} \right) \\
 &= \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned} \tag{24}$$

となる。ここで、 \mathbf{p} と \mathbf{r} のなす角を θ とすれば、 \mathbf{p} と \mathbf{e}_r のなす角も θ であるので、(24) は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
 &= \frac{3(|\mathbf{p}||\mathbf{e}_r| \cos \theta) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
 &= \frac{3p \cos \theta \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned} \tag{25}$$

と書ける。

3.3 電場の極座標による表示

3.3.1 極座標の基底

デカルト座標の正規直交基底を $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とし、 \mathbf{r} はこの基底により

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \tag{26}$$

と表されるものとする。また、極座標 (r, θ, ϕ) とデカルト座標の関係は

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \tag{27}$$

である。ただし、

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases} \tag{28}$$

とする。(26) と (27) から、 \mathbf{r} を

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z \\
 &\equiv \mathbf{r}(r, \theta, \phi)
 \end{aligned} \tag{29}$$

と書く。

r 方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \tag{30}$$

である。(30)の分子は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z) \\ &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (31)$$

である。また、(31)より、

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\|^2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1\end{aligned}\quad (32)$$

であるので、

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = 1 \quad (33)$$

となる。(31)と(33)を(30)に代入して

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z}{1} \\ &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (34)$$

を得る。

次に、 θ 方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|} \quad (35)$$

である。(35)の分子は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z) \\ &= r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z\end{aligned}\quad (36)$$

である。また、(36)より、

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\|^2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2\end{aligned}\quad (37)$$

であり, (28) より $r \geq 0$ であるので

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = r \quad (38)$$

となる。(36) と (38) を (35) に代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \frac{r \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - r \sin \theta \mathbf{e}_z}{r} \\ &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (39)$$

を得る。

最後に, ϕ 方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|} \quad (40)$$

である。(40) の分子は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} &= \frac{\partial}{\partial \phi} (r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + r \cos \theta \mathbf{e}_z) \\ &= -r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (41)$$

である。また, (41) より,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\|^2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \\ &= \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ &= r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (42)$$

であり, (28) より $r \geq 0$ かつ $0 \leq \theta \leq \pi$ であるので

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = r \sin \theta \quad (43)$$

となる。(41) と (43) を (40) に代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\phi &= \frac{-r \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_x + r \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_y}{r \sin \theta} \\ &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (44)$$

を得る。

以上の (34), (39), (44) より, 極座標の基底はデカルト座標の正規直交基底により

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (45)$$

と表される。(45) は, 行列を用いて

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (46)$$

と書ける。行列 R を

$$R := \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

と定義すると, (3.3.1) は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (48)$$

と書ける。

R の転置行列 R^T は

$$\begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

である。 $R^T R$ が

$$\begin{aligned} R^T R &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv I \end{aligned} \quad (50)$$

となることより, (48) の両辺にそれぞれ左側から R^T を掛けて

$$\begin{aligned} R^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} &= R^T R \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \\ \therefore \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} &= R^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

を得る。すなわち, デカルト座標における正規直交基底は極座標の基底により

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (52)$$

と表される。

\mathbf{p} の向きに z 軸を定めると,

$$\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z \quad (53)$$

である。(53) に (52) を適用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= p \mathbf{e}_z \\ &= p(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad (54)$$

となる。(54)を(25)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\approx \frac{3p \cos \theta \mathbf{e}_r - \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
 &= \frac{3p \cos \theta \mathbf{e}_r - p(\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
 &= \frac{2p \cos \theta \mathbf{e}_r + p \sin \theta \mathbf{e}_\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned} \tag{55}$$

を得る。

4 1つの電荷による静電ポテンシャル

正電荷周りの静電ポテンシャルを考える。正電荷による電場は(10)であるが、これは $r' \rightarrow \infty$ とすると $\mathbf{0}$ となる。したがって、無限遠を基準としてポテンシャルを考える。無限遠を基準に取った正電荷周りの静電ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}') &= - \int_{\infty}^{r'} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_{\infty}^{r'} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{e}_{r'} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_{\infty}^{r'} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{e}_{r'} \cdot \mathbf{e}_{r'} dr \\
 &= - \int_{\infty}^{r'} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r'} \frac{1}{r'^2} dr \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{r'} \\
 &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r'} - 0 \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}
 \end{aligned} \tag{56}$$

である。(56)に(14)を適用し(16)を代入すると

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}') &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left| \mathbf{r} - \frac{d}{2} \right|} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}}
 \end{aligned} \tag{57}$$

を得る。

負電荷周りの静電ポテンシャルも同様にして

$$\phi(\mathbf{r}'') = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \tag{58}$$

となる。

5 全体の静電ポテンシャル

双極子モーメントによる静電ポテンシャルは、正電荷周りのものと負電荷周りのものの和で表されるので、(57)と(58)より

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r}') + \phi(\mathbf{r}'') \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \right) \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{59}
 \end{aligned}$$

である。ここで、(21)と同様にして、(20)を(59)に適用する。この場合、 $x = \mp \mathbf{r}\cdot\mathbf{d}/r^2 + d^2/4r^2$, $n = -1/2$, $k = 2$ とし、

$$\begin{aligned}
 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2 \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} + O\left(\frac{d}{r}\right)^2 \right) \right] \\
 &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^2} \right) - \left(1 - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{2r^2} \right) \right] \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}}{r^2} \\
 &= \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{d}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{60}
 \end{aligned}$$

を得る。